

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM

2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1951 - 016

Over de rang van een matrix

H.J.A. Duparc



1951

Over de rang van een matrix.

H.J.A. Duparc.

Zij gevraagd de rang der quadratische matrix (e_{rs}) van de orde n te berekenen, waarin

$$e_{rs} = a_r a_s \quad \text{voor } r \neq s;$$

$$e_{rs} = a_r^2 - 1 \quad \text{voor } r = s;$$

hierbij voldoen de getallen $a_1, \dots, a_n$ aan de relatie $\sum_{r=1}^n a_r^2 = 1$.

Allereerst merken wij op, dat de rang $\leq n-1$ is, want de determinant $|e_{rs}| = 0$. Immers, vermeerderd men de met a_1 vermenigvuldigde eerste kolom van de determinant met de met a_2 vermenigvuldigde tweede kolom, met de met a_3 vermenigvuldigde derde kolom, . . . , tenslotte met de met a_n vermenigvuldigde n^{e} kolom, dan komt in de r^{e} rij en 1^{e} kolom een element te staan met de waarde

$$a_1^2 a_r + a_2^2 a_r + \dots + a_n^2 a_r - a_r = 0.$$

Dus $a_1 |e_{rs}| = 0$; evenzo $a_2 |e_{rs}| = 0$, . . . , $a_n |e_{rs}| = 0$.

Daar niet alle $a_1, \dots, a_n$ gelijk aan nul zijn

(immers $\sum_{r=1}^n a_r^2 = 1$),

vindt men $|e_{rs}| = 0$.

Wij beschouwen thans de minor E_n van het element e_{nn} .

Vermeerderd men de met a_1 vermenigvuldigde 1^{e} kolom van E_n met de met a_2 vermenigvuldigde tweede kolom, . . . , de met a_{n-1} vermenigvuldigde $(n-1)^{\text{e}}$ kolom, dan komt in de r^{e} rij en 1^{e} kolom een element te staan met de waarde

$$a_1^2 a_r + a_2^2 a_r + \dots + a_{n-1}^2 a_r - a_r = -a_n^2 a_r.$$

Dus

$$a_1 E_n = -a_n^2$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1 a_2 & \dots & a_1 a_{n-1} \\ a_2 & a_2^2 - 1 & \dots & a_2 a_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-1} & a_2 a_{n-1} & \dots & a_{n-1}^2 - 1 \end{vmatrix}.$$

Vermindert men in de laatste determinant de 2^{e} kolom met $a_2 \times$ de eerste, . . . , de $(n-1)^{\text{e}}$ met de $a_{n-1} \times$ de eerste, dan vindt men

$$a_1 E_n = -a_n^2 \quad \left| \begin{array}{cccccc} a_1 & 0 & . & . & . & 0 \\ a_2 & -1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n-1} & 0 & . & . & . & -1 \end{array} \right| = (-)^{n-1} a_1 a_n^2.$$

$a_1 \neq 0$, dan is $E_n = (-)^{n-1} a_n^2$

• $a_1 = 0$, maar een der andere grootheden $a_2, \dots, a_{n-1}$, bv $a_t \neq 0$,

dan vindt men hetzelfde resultaat door de hierboven met de 1^{e} kolom verrichte bewerking op de t^{e} kolom toe te passen.

Zijn $a_1, \dots, a_{n-1}$ allen nul, dan is $a_n^2 = 1$ en men heeft

$$|e_{rs}| = \left| \begin{array}{cccccc} -1 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & -1 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & -1 & 0 & . \\ 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \end{array} \right|, \text{ dus ook dan } E_n = (-)^{n-1} = (-)^{n-1} a_n^2.$$

Evenzo $E_s = (-)^{n-1} a_s^2$ ($s=1, \dots, n-1$). Daar één der grootheden

$a_1, \dots, a_n$ van nul verschilt, is er een s met $E_s \neq 0$, dus de rang van (e_{rs}) is juist $n-1$.